KTH TEORETISK FYSIK

TENTAMEN KVANTFYSIK SI1151
Lördag 141025 kl. 09.00-14.00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	Teoretisk fysiks formelsamling, BETA, miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Grundtillståndet för en elektron i väte är

$$\Psi_{100}(r, \theta, \phi) = Ne^{-r/a}$$

där a är en konstant (Bohrradien).
(a) Normera tillståndet.
(b) Beräkna

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

(c) Beräkna sannolikheten att hitta elektronen på avstånd $r > 2a$ från kärnan.

2. Uppskatta grundtillståndsenergin med variationsmetoden för en partikel med massa m som kan röra sig i en dimension. Potentialen är en delta-funktionspotential $V(x) = -\alpha\delta(x)$ där $\alpha > 0$ är en konstant. Använd variationsvågfunktionen

$$\psi = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2}$$

där λ är en variationsparameter.

3. Hamiltonoperatorn för en partikel med massa m som rör sig på en sfär med radie R är

$$H = \frac{L^2}{2I}$$

där L^2 är rörelsemängdsmomentsoperatorn i kvadrat och $I = mR^2$. Systemets tillstånd är

$$\psi(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin 2\theta \cos \phi$$

Bestäm alla möjliga värden som kan fås vid en mätning av energin E, rörelsemängdsmomentet i kvadrat L^2 och z-komponenten L_z, samt sannolikheten att få dessa värden.

VÄND!

4. En elektron och en positron, som båda har spinn 1/2, är i ett homogent magnetfält riktat i z-riktningen. Om växelverkan mellan partiklarnas spinn kan försummas så ges spinndelen av Hamiltonoperatorn av

$$H = \omega_0 (S_{1z} - S_{2z})$$

där $\mathbf{S}_1$ är elektronspinnet, $\mathbf{S}_2$ är positronspinnet, och $\omega_0 = eB/m$ är en konstant. Vid tiden $t = 0$ antas totala spinnet vara i singlettillståndet. Visa att totala spinnet oscillerar mellan ett spinn 0 tillstånd och ett spinn 1 tillstånd och bestäm oscillationsfrekvensen.

5. En partikel med massa m är i en tvådimensionell harmonisk oscillatorpotential. Hamiltonoperatorn är

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$$

Systemet störs av en potential

$$H' = Axy$$

där A är en konstant. Bestäm första ordningens korrektion till energin i det första exciterade tillståndet.

LYCKA TILL!

Harmonisk oscillator:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \ , \ a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x) \ , \ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x)$$

Rörelsemängdsmoment:

$$L^2 |lm\rangle = l(l+1)\hbar^2 |lm\rangle \ , \ L_z |lm\rangle = m\hbar |lm\rangle$$

Singlett:

$$|sm\rangle = |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

Triplett:

$$|11\rangle = \uparrow\uparrow \ , \ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \ , \ |1,-1\rangle = \downarrow\downarrow$$

Lösning till tentamen i Kvantfysik 141025

1. (a) Normering:

$$4\pi \int_0^\infty |\Psi|^2 r^2 dr = 4\pi |N|^2 \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = 4\pi |N|^2 \frac{2}{(2/a)^3} = \pi a^3 |N|^2 = 1$$

Tag därför

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

(b)

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{r} |\Psi|^2 r^2 dr = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-2r/a} r dr = \frac{4\pi}{\pi a^3} \frac{1}{(2/a)^2} = \frac{1}{a}$$

(c)

$$P(r > 2a) = 4\pi \int_{2a}^\infty |\Psi|^2 r^2 dr = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_{2a}^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = 13e^{-4} = 0.24$$

2. Beräkna energin:

$$\begin{aligned}
E &= \langle\psi|\ H|\ \psi\rangle = \frac{1}{2m}\underbrace{\langle\psi|p^2|\psi\rangle}_{=\langle p\psi|p\psi\rangle} - \alpha\langle\psi|\delta(x)|\psi\rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/2} 4\lambda^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\lambda x^2}\,dx}_{=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{(2\lambda)^3}\right]^{1/2}} - \alpha\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-2\lambda x^2}\,dx}_{=1} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\lambda - \alpha\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Minimera:

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\pi\lambda}\right)^{1/2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2m^2\alpha^2}{\pi\hbar^4}$$

Energiuppskattningen blir

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2m^2\alpha^2}{\pi\hbar^4} - \alpha\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{m\alpha}{\hbar^2} = -\frac{m\alpha^2}{\pi\hbar^2}$$

Jämförelse med exakt resultat:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{-m\alpha^2/\pi\hbar^2}{-m\alpha^2/2\hbar^2} = \frac{2}{\pi} = 0.64$$

Variationsuppskattningen överskattar den exakta grundtillståndsenergin som väntat.

3. Skriv vågfunktionen som en superposition av klotfunktioner Y_l^m:

$$\begin{aligned}
\psi &= \sqrt{\frac{15}{16\pi}}\sin 2\theta\cos\phi \\
&= \sqrt{\frac{15}{16\pi}}2\cos\theta\sin\theta\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y_2^1 + Y_2^{-1})
\end{aligned}$$

Dvs en mätning ger tillstånden $Y_2^{\pm 1}$ med sannolikhet 0.5 vardera. Möjliga mätvärden ges av:

$$\hat{L}^2 Y_2^{\pm 1} = 2(2+1)\hbar^2 Y_2^{\pm 1} \Rightarrow L^2 = 6\hbar^2 \text{ (tvåfalt degenererat)}$$

$$\hat{L}_z Y_2^{\pm 1} = \pm\hbar Y_2^{\pm 1} \Rightarrow L_z = \pm\hbar \text{ (ej degenererade)}$$

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{3\hbar^2}{I} \text{ (tvåfalt degenererat)}$$

Alltså ger en mätning energin $E = 3\hbar^2/I$ och rörelsemängdsmomentets kvadrat $L^2 = 6\hbar^2$ med sannolikhet 1. Rörelsemängdsmonentets z-komponent fås till $L_z = \pm\hbar$ med sannolikhet 0.5 vardera.

4. Notation: för elektronspinnet är $S_{1z}\chi_{1\pm} = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_{1\pm}$, osv. De två termerna i singletten är energiegentillstånd eftersom

$$\begin{aligned} H\chi_{1+}\chi_{2-} &= \omega_0(S_{1z} - S_{2z})\chi_{1+}\chi_{2-} = \omega_0\left(+\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2}\right)\chi_{1+}\chi_{2-} = \hbar\omega_0\chi_{1+}\chi_{2-} \\ H\chi_{1-}\chi_{2+} &= \omega_0(S_{1z} - S_{2z})\chi_{1-}\chi_{2+} = \omega_0\left(-\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2}\right)\chi_{1-}\chi_{2+} = -\hbar\omega_0\chi_{1-}\chi_{2+} \end{aligned}$$

dvs energiegenvärdena är $E_\pm = \pm\hbar\omega_0$ Därför är tillståndets tidsberoende

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{1+}\chi_{2-}e^{-i\omega_0 t} - \chi_{1-}\chi_{2+}e^{+i\omega_0 t}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}\left(\chi_{1+}\chi_{2-} - \chi_{1-}\chi_{2+}e^{+i2\omega_0 t}\right) \end{aligned}$$

Den övergripande fasfaktorn $e^{-i\omega_0 t}$ kan vi kasta.

Vid tiden $t = \pi/2\omega_0$ blir tillståndet

$$\begin{aligned} \chi(t = \pi/2\omega_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{1+}\chi_{2-} - \chi_{1-}\chi_{2+}e^{+i\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{1+}\chi_{2-} + \chi_{1-}\chi_{2+}\right) \\ &= |10\rangle \end{aligned}$$

dvs ett spinn-1 (triplett) tillstånd. Vid tiden $t = \pi/\omega_0$ blir det minustecken igen, och systemet är tillbaks i singletten. Detta upprepas sedan periodiskt. Alltså oscillerar systemet mellan singletten $|00\rangle$ och triplettttillståndet $|10\rangle$ med vinkelfrekvensen $2\omega_0$.

5. Detta är ett problem i degenererad störningsräkning eftersom första exciterade ostörda tillståndet har energi

$$E_1^0 = (0 + 1/2 + 1 + 1/2)\hbar\omega = 2\hbar\omega$$

som är tvåfalt degenererat:

$$|\psi_a\rangle = |01\rangle \ , \ |\psi_b\rangle = |10\rangle$$

Här betecknar $|n_x n_y\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle$ och $|n_x\rangle$ är egentillstånden till endimensionella oscillatorn.

Bestäm störningens matris i det degenererade underrummet:

$$\begin{aligned}
W_{aa} &= A\langle 01|xy|01\rangle = A\langle 0|x|0\rangle\langle 1|y|1\rangle = 0 \\
W_{bb} &= A\langle 10|xy|10\rangle = A\langle 1|x|1\rangle\langle 0|y|0\rangle = 0 \\
W_{ab} &= A\langle 01|xy|10\rangle = A\langle 0|x|1\rangle\langle 1|y|0\rangle = A\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|a^\dagger + a|1\rangle\langle 1|a^\dagger + a|0\rangle \\
&= A\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|0\rangle\langle 1|1\rangle = A\frac{\hbar}{2m\omega} = B \\
W_{ba} &= A\langle 10|xy|01\rangle = A\langle 1|x|0\rangle\langle 0|y|1\rangle = A\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 1|a^\dagger + a|0\rangle\langle 0|a^\dagger + a|1\rangle \\
&= A\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 1|1\rangle\langle 0|0\rangle = A\frac{\hbar}{2m\omega} = B
\end{aligned}$$

Störningsmatrisen blir

$$W = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

Hitta egenvärden:

$$\begin{vmatrix} -E^1 & B \\ B & -E^1 \end{vmatrix} = (E^1)^2 - B^2 = 0 \Rightarrow E^1_\pm = \pm B$$

Alltså splittrar störningen upp första exciterade nivån till två nivåer:

$$E_1 = E_1^0 \pm B = 2\hbar\omega \pm A\frac{\hbar}{2m\omega}$$